$$T_{\vec{e}_\xi} \overrightarrow{M}_{n-p} \parallel \vec{e}_\xi \, . \qquad (8)$$

Обратно, если имеет место (8), то из (5) получим (3). Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Данная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\widetilde{\Sigma}_n$ для некоторого p-мерного распределения, порождаемого этой сетью, тогда и только тогда, когда имеют место (7), (8).

С л е д с т в и е. Ортогональная голономная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\widetilde{\Sigma}_n$ для некоторого p-мерного распределения, порождаемого этой сетью.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Сети на многообразиях. - Тр. геометрич. семинара. ВИНИТИ АН СССР. М., 1974, т. 6, с. 189-204.

2. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей. - Уч. зап. МГПИ им. В.И. Ленина, 1965, №243, с. 29-37.

3. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n, и их обобщения. - Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР, 1975, т. 7, с. 215-229.

5. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. - Тр. Геометрич. семинара. ВИНИТИ АН СССР, М., 1971, т. 3, с. 49-94.

5. Gray A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. Jour. Math. and Mechanics, 1967, Vol. 16, №7, p. 715-737.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

В.В. М а х о р к и н

КОНГРУЭНЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В $\mathbb{P}_6$

В шестимерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция квадратичных элементов. Выбор такого объекта исследования обусловливается тем, что это семейство квадратичных элементов является одним из простейших, у которого трансверсальным образом возникают критические точки первого порядка коранга два и, следовательно, возникают фокальные точки первого порядка коранга два, ранее не изучавшиеся.

Всякой конгруэнции квадратичных элементов в $\mathbb{P}_6$ естественным образом соответствует семейство квадратичных элементов. Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^2$ является пространством параметров рассматриваемой конгруэнции, тогда семейство квадратичных элементов будет [1] шестимерным подмногообразием Z в $U \times \mathbb{P}_6$ вместе с его проекцией на первый сомножитель

$$p: Z \to U. \qquad (1)$$

Кроме того, имеем проекцию на второй сомножитель

$$\pi: Z \to \mathbb{P}_6 , \qquad (2)$$

причем для всякого $t \in U$, $\pi(p^{-1}(t))$ квадрика квадратичного элемента в $\mathbb{P}_6$, соответствующая параметру $t \in U$.

Будем считать, что отображение (2) является 1-общим отображением [2], тогда множества $S_1(\pi)$ и $S_2(\pi)$ являются подмногообразиями в Z, причем

$$Z = S_0(\pi) \cup S_1(\pi) \cup S_2(\pi) , \qquad (3)$$

здесь $S_0(\pi)$ множество регулярных точек отображения π, $S_1(\pi)$ множество особых точек коранга один отображения π,

$S_2(\pi)$ множество особых точек коранга два отображения π. Из (3) следует

$$\pi(Z) = \pi(S_0(\pi)) \cup \pi(S_1(\pi)) \cup \pi(S_2(\pi)), \quad (4)$$

здесь $\pi(Z)$ конгруэнция квадратичных элементов в $\mathbb{P}_6$.

Для всякого $t \in U$ положим

$$Z_t = Z \cap p^{-1}(t), \quad S_0(\pi)_t = S_0(\pi) \cap p^{-1}(t),$$

$$S_1(\pi)_t = S_1(\pi) \cap p^{-1}(t), \quad S_2(\pi)_t = S_2(\pi) \cap p^{-1}(t).$$

Тогда

$$\pi(Z_t) = \pi(S_0(\pi)_t) \cup \pi(S_1(\pi)_t) \cup \pi(S_2(\pi)_t) \quad (5)$$

для всякого $t \in U$.

Здесь $\pi(S_1(\pi)_t)$ множество фокальных точек первого порядка коранга один квадрики $\pi(Z_t)$ конгруэнции $\pi(Z)$, а $\pi(S_2(\pi)_t)$ множество фокальных точек первого порядка коранга два квадрики $\pi(Z_t)$ конгруэнции $\pi(Z)$ [1].

Используя подвижной репер $\{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 6)$ в $\mathbb{P}_6$ и располагая вершины $A_0, \dots, A_5$ в плоскости L_t квадрики $\pi(Z_t) \subset \mathbb{P}_6$, а вершину A_6 вне плоскости L_t, подмногообразие Z в $U \times \mathbb{P}_6$ можно задать следующей системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \ (i, j, \dots = 0, 1, \dots, 5), \quad (6)$$

кроме того

$$\omega_i^6 = \Lambda_{ia} \tau^a, \quad \theta_{ij} = \Lambda_{ija} \tau^a, \quad (7)$$

$a, b, \dots = 1, 2$, τ^a -инвариантные формы параметрической группы. Величины $a_{ij}, \Lambda_{ia}, \Lambda_{ija}$ зависят от параметра $t \in U$. Тогда [3] критические точки отображения (2) определяются системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \det \|A\| = 0, \quad (8)$$

где

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} \Lambda_{i1} x^i & \Lambda_{ij1} x^i x^j \\ \Lambda_{i2} x^i & \Lambda_{ij2} x^i x^j \end{Vmatrix}.$$

Фиксируя в системе (8) параметр $t \in U$, получим систему уравнений, определяющих фокальное многообразие первого порядка квадрики $\pi(Z_t) \subset \mathbb{P}_6$, которое в общем случае является трехмерным алгебраическим многообразием шестого порядка. Однако проведенный выше анализ с точки зрения теории особенностей дифференцируемых отображений показывает, что фокальное многообразие первого порядка является объединением многообразия $\pi(S_1(\pi)_t)$, определяемого системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \operatorname{rang} \|A\| = 1, \quad (9)$$

и многообразия $\pi(S_2(\pi)_t)$, определяемого системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \Lambda_{ia} x^i = 0, \quad \Lambda_{ija} x^i x^j = 0. \quad (10)$$

Причем в уравнениях (8), (10) фиксирован параметр $t \in U$. Из уравнений (8), (10) следует, что многообразие $\pi(S_2(\pi)_t)$ является нульмерным алгебраическим многообразием порядка восемь, а многообразие $\pi(S_1(\pi)_t)$ представляет собой трехмерное алгебраическое многообразие шестого порядка, определяемое системой уравнений (8) при фиксированном $t \in U$, из которого удалено многообразие $\pi(S_2(\pi)_t)$.

В отличие от фокальных точек первого порядка коранга один, которые характеризуются "фокальностью" вдоль некоторых направлений, фокальные точки первого порядка коранга два характеризуются "фокальностью" вдоль всякого направления, что показывает следующая

Т е о р е м а. Касательная плоскость к поверхности, описываемой фокальной точкой первого порядка коранга два, лежит в касательной плоскости в этой точке к квадрике квадратичного элемента.

Список литературы

1. Махоркин В.В. Фокальные точки первого порядка. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с. 116-119.

2. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М., 1977.

3. Фам Ф. Особенности процессов многократного рассеяния. М., 1972.